Магистратура 44.04.01 «Педагогическое образование»
Профиль «Математическое образование»

Тест включает:

- 30 заданиий по математике (алгебра, логика и теория чисел, геометрия, математический анализ, элементарная математика),
- 10 заданий по педагогике.

Задания имеют типы требований:

- Выберите один вариант (несколько вариантов) ответа
- Установите соответствие
- Вставьте пропущенное число

Демонстрационный вариант теста

Математический анализ

Задача 1. Найдите значение предела функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x^2+10x}{3x-5+4x^2}$.

Решение. Вычисление предела начинаем с подстановки предельного значения x в функцию $f(x)=\frac{1-x^2+10x}{3x-5+4x^2}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^2+10x}{3x-5+4x^2}=\frac{1-(\infty)^2+10\cdot\infty}{3\cdot\infty-5+4(\infty)^2}.$$

Далее, пользуясь свойствами бесконечно больших функций, получим неопределенность:

$$\frac{1-(\infty)^2+10\cdot\infty}{3\cdot\infty-5+4(\infty)^2}=\frac{\infty}{\infty}.$$

Для раскрытия неопределенности разделим числитель и знаменатель на x^2 (на старшую степень числителя и знаменателя), подставим бесконечность в преобразованное выражение и, используя свойства бесконечно малых функций, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}-1+\frac{10}{x}}{\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}+4}=\frac{0-1+0}{0-0+4}=-\frac{1}{4}.$$

Ответ. $-\frac{1}{4}$.

Задача 2. Найдите производную функции $y = \ln \frac{ax}{(5x+6)^2}$, $a > 0$ и укажите вещественное значение параметра a, при котором выполняется равенство $y' = \frac{6-5x}{(5x+6)x}$.

Решение. Заданная функция является сложной, а значит нужно производную этой функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу:

$$y' = \left(\ln \frac{ax}{(5x+6)^2}\right)' = \frac{1}{\frac{ax}{(5x+6)^2}} \cdot \left(\frac{ax}{(5x+6)^2}\right)'.$$

Далее воспользуемся правилами дифференцирования:

$$y' = \frac{(5x+6)^2}{ax} \cdot \frac{(ax)'(5x+6)^2 - ax((5x+6)^2)'}{(5x+6)^4} = \frac{1}{ax} \cdot \frac{a(5x+6)^2 - ax \cdot 2 \cdot (5x+6) \cdot (5x+6)'}{(5x+6)^2} =$$

$$= \frac{1}{ax} \cdot \frac{a(5x+6)^2 - ax \cdot 2 \cdot (5x+6) \cdot 5}{(5x+6)^2} = \frac{a(5x+6)(5x+6-10x)}{ax(5x+6)^2} = \frac{6-5x}{x(5x+6)}.$$

Таким образом, значение a ограничивается только ОДЗ исходной функции: $a \in (0, +\infty)$.

Ответ. $(0, +\infty)$.

Задача 3. Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций: $y = 2x + 1$, $y = 4 - x^2$, $y = 1$ (при условии $x \geqslant 0$).

Решение. Заданная криволинейная трапеция изображена на Рис 1. Площадь криволинейной трапеции S равна сумме площадей двух криволинейных трапеций (на чертеже они обозначены S_1 и S_2). Фигура S_1 ограничена сверху графиком функции $y = 2x+1$, снизу — $y = 1$. Фигура S_2 ограничена сверху графиком функции $y = 4-x^2$, снизу — $y = 1$. Таким образом,

$$S = S_1 + S_2 = \int\limits_a^b ((2x+1) - 1)dx + \int\limits_b^c ((4 - x^2) - 1)dx.$$

Границы интегрирования — это абсциссы точек пересечения графиков функций: $y = 2x + 1$ и $y = 1$, $y = 2x + 1$ и $y = 4 - x^2$, $y = 4 - x^2$ и $y = 1$. Их можно найти решив соответствующие уравнения.

Точка $x = a$:

$$2x + 1 = 1$$

$$a = x = 0.$$

Точка $x = b$:

$$2x + 1 = 4 - x^2,$$

$$b = x = 1 \text{ с учетом условия } x \geqslant 0.$$

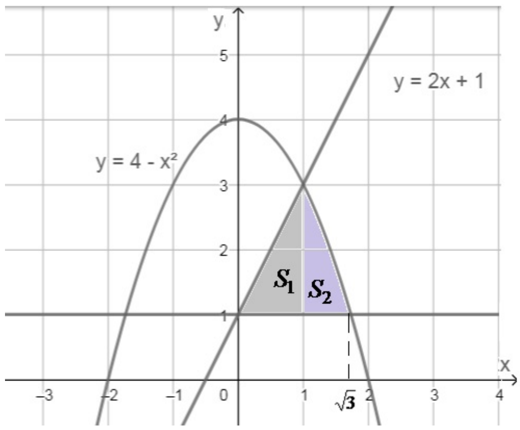

Рис 1.

Точка $x = c$:

$$1 = 4 - x^2,$$

$$c = x = \sqrt{3} \text{ с учетом условия } x \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$S = S_1 + S_2 = \int\limits_0^1 2x dx + \int\limits_1^{\sqrt{3}} (3 - x^2) dx =$$

$$= x^2 \Big|_0^1 + 3x \Big|_1^{\sqrt{3}} - \frac{x^3}{3} \Big|_1^{\sqrt{3}} = 1 + 3(\sqrt{3} - 1) - (\sqrt{3} - \frac{1}{3}) = 2\sqrt{3} - \frac{5}{3}.$$

Ответ. $2\sqrt{3} - \frac{5}{3}$.

Задача 4. Вычислите интеграл

$$\int\limits_{-3}^{5} |2x - 1| dx.$$

Решение. Разобьем интеграл на два, так как подынтегральная функция меняет свой знак при переходе через точку $x = \frac{1}{2}$:

$$\int\limits_{-3}^{5} |2x - 1| dx = \int\limits_{-3}^{\frac{1}{2}} -(2x - 1) dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{5} (2x - 1) dx = -x^2 \Big|_{-3}^{\frac{1}{2}} + x \Big|_{-3}^{\frac{1}{2}} + x^2 \Big|_{\frac{1}{2}}^{5} - x \Big|_{\frac{1}{2}}^{5} = 32,5.$$

Ответ. $32,5$.

Задача 5. Запишите общее решение однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' - y' - 6y = 0.$$

Решение. Напомним, что вид общего решения ОЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_1y'' + a_2y' + a_3y = 0$$

зависит от корней характеристического уравнения

$$a_1k^2 + a_2k + a_3 = 0.$$

Если корни характеристического уравнения действительны и различны, то решение имеет вид

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}.$$

Если корень характеристического уравнения кратный, то решение имеет вид

$$y \;=\; C_1e^{k_1x} + C_2xe^{k_1x}.$$

Если корни характеристического уравнения комплексные $\alpha \pm i\beta$, то решение имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x).$$

Составим характеристическое уравнения для заданного дифференциального уравнения:

$$k^2 - k - 6 = 0.$$

Вычислим корни данного квадратного уравнения и получим два действительных корня: $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$. Следовательно, общее решение имеет вид

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}.$$

Ответ. $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-2x}$.

Задача 6. Найдите максимум и минимум функции

$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x.$$

Решение. При решении задач на нахождение экстремумов функции можно выделить два основных этапа:

1) Используя необходимое условие экстремума найдем критические точки (точки «подозрительные» на экстремум). Для этого вычислим производную функции y

$$y' = (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x)' = x^2 - x - 6,$$

приравняем ее к нулю

$$x^2 - x - 6 = 0$$

и найдем корни данного квадратного трехчлена

$$x_1 = -2, x_2 = 3.$$

2) Используя достаточное условие экстремума среди критических точек выделим точки максимума и минимума функции. Для этого разобъем числовую ось на промежутки полученными критическими точками (см. Табл. 1) и определим знак производной на каждом промежутке.

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 3)$	3	$(3; \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	возрастает	$7\frac{1}{3}$	убывает	$-13,5$	возрастает

Таблица 1. Промежутки монотонности функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x$.

В точке $x = -2$ производная меняет знак с $\ll + \gg$ на $\ll - \gg$, значит в этой точке максимум. Вычислим значение максимума:

$$y_{max} = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6 \cdot (-2) = \frac{22}{3} = 7\frac{1}{3}.$$

В точке $x = 3$ производная меняет знак с $\ll - \gg$ на $\ll + \gg$, x_2 — точка минимума. Значение минимума соответственно равно

$$y_{min} = \frac{3^3}{3} - \frac{3^2}{2} - 6 \cdot 3 = -13,5.$$

Ответ. $y_{max} = 7\frac{1}{3}$, $y_{min} = -13,5$.

Геометрия

Задача 7. Укажите для прямой

$$\begin{cases} x = -3t - 10, \\ y = 5t - 1, \\ z = 2t + 2 \end{cases}$$

среди указанных прямых

1) $\frac{x+10}{-1.2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{0.8}$

2) $\frac{x+10}{-3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{2}$,

3) $\frac{x+10}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$.

а) параллельную прямую;

б) перпендикулярную прямую;

в) совпадающую с ней.

Решение. Для начала вспомним, что *каноническим уравнением прямой* в пространстве называется уравнение вида:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

здесь вектор $\bar{a}=\{m,n,p\}$ — *направляющий вектор* прямой и $M_0(x_0,y_0,z_0)$ — точка, лежащая на прямой.

Заданная прямая описана *параметрическим уравнением* вида:

$$\begin{cases} x=mt+x_0, \\ y=nt+y_0, \\ z=pt+z_0. \end{cases}$$

Исключив параметр t из системы

$$\begin{cases} x=-3t-10, \\ y=5t-1, \\ z=2t+2, \end{cases}$$

получим каноническое уравнение:

$$t=\frac{x+10}{-3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z-2}{2},$$

совпадающее с уравнием 2.

Направляющий вектор данной прямой $\bar{a}_2=\{-3,5,2\}$. Направляющие векторы прямых 1 и 3 соотвественно равны $\bar{a}_1=\{-1.2,2,0.8\}$, $\bar{a}_3=\{-1,-1,1\}$.

Условие параллельности прямых – пропорциональность координат направляющих векторов:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Непосредственной проверкой убедимся, что данное условие выполняется для векторов $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$:

$$\frac{-3}{-1.2}=\frac{5}{2}=\frac{2}{0.8}=2.5.$$

Таким образом, заданная прямая параллельна прямой под номером 1.

Условие перпендикулярности прямых – равенство нулю скалярного произведения направляющих векторов:

$$m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0.$$

Непосредственной проверкой убедимся, что данное условие выполняется для векторов $\bar{a}_3$ и $\bar{a}_2$:

$$-3\cdot(-1)+5\cdot(-1)+2\cdot 1=0.$$

Таким образом, заданная прямая перпендикулярна прямой под номером 3.

Ответ. 1а, 2в, 3б.

Задача 8. Укажите параллельную и перпендикулярную прямые к плоскости

$$3x - 2y + z - 6 = 0:$$

1) $\begin{cases} x = 3t - 10, \\ y = 2t - 1, \\ z = t + 2 \end{cases}$

2) $\frac{x+10}{-2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{16}$

3) $\frac{x+10}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}$

4) $\begin{cases} x = 3t - 10, \\ y = -2t - 1, \\ z = t + 2 \end{cases}$

Решение. Общее уравнение плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

здесь $A, B, C-$ координаты нормального вектора, то есть плоскость перпендикулярна вектору $\overline{N} = \{A, B, C\}$.

Таким образом, если прямая параллельна плоскости, то направляющий вектор прямой $\bar{a} = \{m, n, p\}$ перпендикулярен нормальному вектору плоскости $\overline{N} = \{A, B, C\}$. Другими словами, скалярное произведение векторов равно 0:

$$(\bar{a}, \overline{N}) = 0$$

или

$$A \cdot m + B \cdot n + C \cdot p = 0.$$

Проверяя последнее равенство, получим, что оно выполняется только для прямой номер 2:

$$3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 5 + 1 \cdot 16 = 0.$$

Теперь рассмотрим случай перпендикулярности прямой и плоскости. Нормальный вектор плоскости $\overline{N}$ перпендикулярен этой плоскости, следовательно направляющий вектор прямой (напомним, что он параллелен самой прямой) $\bar{a}$, перпендикулярной к заданной плоскости, будет коллинеарен нормальному вектору $\overline{N}$, то есть координаты векторов $\overline{N}$ и $\bar{a}$ должны быть пропорциональны:

$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p} = k.$$

Проверяя последнее равенство получим, что оно выполняется только для прямой номер 4:

$$\frac{3}{3} = \frac{-2}{-2} = \frac{1}{1} = 1.$$

Ответ. 2) паралелльна, 4) перпендикулярна.

Задача 9. Найдите точку пересечения прямой

$$\begin{cases} x = 3t - 10, \\ y = -2t - 1, \\ z = t + 2 \end{cases}$$

и плоскости

$$3x - 2y + z - 16 = 0.$$

Решение. Чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости подставим выражения x, y, z из параметрического уравнения прямой в уравнение плоскости:

$$3 \cdot (3t - 10) - 2 \cdot (-2t - 1) + (t + 2) - 16 = 0,$$

$$14t - 42 = 0,$$

$$t = 3,$$

а координаты точки пересечения

$$\begin{cases} x = 3 \cdot 3 - 10 = -1, \\ y = -2 \cdot 3 - 1 = -7, \\ z = 3 + 2 = 5. \end{cases}$$

Ответ. $(-1, -7,\ 5)$.

Задача 10. Найдите вектор касательной к параметрически заданной кривой при $t = 0$:

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t + 1, \\ z = 2t. \end{cases}$$

Решение. Найдем координаты направляющего вектора касательной к кривой

$$r' = (-2\sin t, 2\cos t, 2).$$

В частности, в точке $t = 0$:

$$r' = (-2\sin t, 2\cos t, 2)|_{t=0} = (0, 2, 2).$$

Ответ. $(0, 2, 2)$.

Алгебра, логика и теория чисел

Задача 11. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & -2 \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 & = & 1 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 & = & -4 \end{cases}$$

Решение. Воспользуемся методом последовательного исключения неизвестных. Чтобы исключить неизвестное x_1 во втором и третьем уравнениях, умножим первое уравнение на -3 и прибавим полученное уравнение $-3x_1 - 6x_2 - 18x_3 = 6$ ко второму и третьему уравнению системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & -2 \\ -7x_2 - 14x_3 & = & 7 \\ -5x_2 - 13x_3 & = & 2 \end{cases} \qquad (1)$$

Разделим обе части второго уравнения системы (1) на -7 :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & -2 \\ x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ -5x_2 - 13x_3 & = & 2 \end{cases} \qquad (2)$$

Чтобы исключить неизвестное x_2 в третьем уравнении, умножим второе уравнение на 5 и прибавим полученное уравнение $5x_2 + 10x_3 = -5$ к третьему уравнению системы (2):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 & = & -2 \\ x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ -3x_3 & = & -3 \end{cases} \qquad (3)$$

Будем работать с системой (3). Из третьего уравнения получаем $x_3 = 1$. Найденное значение подставляем во второе уравнение:

$$x_2 + 2 \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -3.$$

Далее, в первое уравнение подставим значения для x_2 и x_3 :

$$x_1 + 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 = -2 \Leftrightarrow x_1 = -2.$$

Итак,

$$x_1 = -2,\ x_2 = -3,\ x_3 = 1.$$

Для того чтобы проверить, что найдено верное решение, достаточно убедиться, что каждое уравнение исходной системы превращаются в верные равенства при подстановке -2 вместо x_1, -3 вместо x_2, 1 вместо x_3.

Ответ. $(-2, -3, 1)$.

Задача 12. Задано преобразование $\varphi(x)$ пространства R^2 в себя:

$$\varphi(x) = \varphi(x_1, x_2) = (x_1 - 2x_2, -3x_1).$$

Для векторов $\overline{a} = (-1, 2)$ и $\overline{b} = (2, -3)$ найдите образ суммы $\varphi(\overline{a}+\overline{b})$ и сумму образов $\varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b})$.

Решение. Сначала найдем вектор, равный сумме $\overline{a} + \overline{b}$:

$$\overline{a} + \overline{b} = (-1, 2) + (2, -3) = (1, -1).$$

Его образ

$$\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = \varphi(1, -1) = (1 - 2 \cdot (-1), -3 \cdot 1) = (3, -3).$$

Образ вектора $\overline{a}$ равен

$$\varphi(\overline{a}) = \varphi(-1, 2) = (-1 - 2 \cdot 2, -3 \cdot (-1)) = (-5, 3),$$

образ вектора $\overline{b}$ равен

$$\varphi(\overline{b}) = \varphi(2, -3) = (2 - 2 \cdot (-3), -3 \cdot 2) = (8, -6).$$

Сумма образов $\varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b}) = (-5, 3) + (8, -6) = (3, -3)$.

Ответ. $\varphi(\overline{a} + \overline{b}) = (3, -3)$, $\varphi(\overline{a}) + \varphi(\overline{b}) = (3, -3)$.

Задача 13. Найдите сумму неполного частного и остатка от деления многочлена $x^3 + 5x^2 - 2x - 16$ на $x^2 - 4$.

Решение. Для многочленов, как и для целых чисел, существует алгоритм деления с остатком. Алгоритм позволяет для любых многочленов $f(x)$ и $g(x)$ найти такие многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причем степень $r(x)$ меньше степени $g(x)$ или $r(x) = 0$. Многочлены $q(x)$ (неполное частное) и $r(x)$ (остаток), удовлетворяющие этому условию, определяются единственным образом. Используем запись деления уголком:

$$\begin{array}{rrrr|l}
 x^3 & +5x^2 & -2x & -16 & x^2 - 4 \\
 -\ x^3 & & -4x & & \overline{x + 5} \\
\hline
 & 5x^2 & +2x & -16 & \\
 & -\ 5x^2 & & -20 & \\
\hline
 & & 2x & +4 &
\end{array}$$

Итак, неполное частное равно $x + 5$, остаток равен $2x + 4$, их сумма $3x + 9$.

Ответ. $3x + 9$.

Задача 14. При каком значении параметра λ вектор $1-\lambda i$ из пространства комплексных чисел $\mathbb{C}$ над полем $\mathbb{R}$ равен разности векторов $\overline{b} = 4 + 2i$ и $\overline{c} = 3 - 9i$.

Решение. Разностью векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$ является, с одной стороны, вектор

$$\bar{b} - \bar{c} = 4 + 2i - (3 - 9i) = 1 + 11i,$$

с другой – вектор $1 - \lambda i$. Из равенства

$$1 + 11i = 1 - \lambda i$$

найдем значение $\lambda = -11$.

Ответ. -11.

Задача 15. Число n на 6 делится с остатком 4, а на 4 делится с остатком 2. Какой остаток дает n при делении на 12?

Решение. Составим таблицу, в которой рассматриваются все возможные варианты остатков при делении числа n на 12 и указываются соответствующие остатки при делении n на 4 ($\text{ост}_4\,(n)$), а также при делении n на 6 ($\text{ост}_6\,(n)$):

n	$\text{ост}_4\,(n)$	$\text{ост}_6\,(n)$	n	$\text{ост}_4\,(n)$	$\text{ост}_6\,(n)$
$12q$	0	0	$12q+6$	2	0
$12q+1$	1	1	$12q+7$	3	1
$12q+2$	2	2	$12q+8$	0	2
$12q+3$	3	3	$12q+9$	1	3
$12q+4$	0	4	$12q+10$	2	4
$12q+5$	1	5	$12q+11$	3	5

Как видно из таблицы, условия $\text{ост}_4\,(n) = 2$, $\text{ост}_6\,(n) = 4$ выполняются только для чисел вида $n = 12q + 10$. Таким образом, при делении на 12 число n дает остаток 10.

Ответ. 10.

Задача 16. При каком значении t наибольший общий делитель чисел 1800 и $108 \cdot 5^t$ равен 180?

Решение. Запишем каноническое разложение чисел 1800 и $108 \cdot 5^t$ на простые множители:

$$1800 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2,$$

$$108 \cdot 5^t = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^t.$$

Тогда

$$\text{НОД}(1800, 108 \cdot 5^t) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{min(2,t)}.$$

С другой стороны, наибольший общий делитель чисел равен

$$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Из равенства

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^{min(2;t)} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

следует, что $t = 1$.

Ответ. 1.

Задача 17. Найти остаток от деления 2011^{2007} на 4.

Решение. Степени остатков образуют цикл, так как остатков от деления на заданное число конечное количество, а значит, на каком-то шаге получится один из уже имеющихся остатков, и процесс пойдет по циклу.

Так как $\text{ост}_4\,(2011) = 3$, то $\text{ост}_4\,(2011^{2007}) = \text{ост}_4\,(3^{2007})$. Составим цикл остатков степеней 3.

3^n	остаток
3^1	3
3^2	1
3^3	3
$\ldots$	$\ldots$

Итак, образуется цикл длины 2: четные степени 3 дают остаток 1, а нечетные — 3. Таким образом, $\text{ост}_4\,(3^{2007}) = 3$.

Заметим, что задачу о последней цифре числа можно считать частным случаем задачи об остатках степеней, поскольку последняя цифра — это остаток от деления числа на 10. Например, 234 заканчивается на 4, 4 — остаток от деления 234 на 10.

Ответ. 3.

Задача 18. Найдите остаток от деления квадрата нечетного числа на 8.

Решение. Нечетное число a при делении на 8 может давать остатки 1, 3, 5, 7. Воспользуемся известным свойством остатков: «Если a делится на m с остатком r, то остаток a^n при делении на m равен остатку от деления r^n на m». Процесс вычисления остатков от деления a^2 на 8 представим в таблице:

a	$\text{ост}_8\,(a)$	$\text{ост}_8\,(a^2)$
$8q+1$	1	$\text{ост}_8\,(1^2) = 1$
$8q+3$	3	$\text{ост}_8\,(3^2) = 1$
$8q+5$	5	$\text{ост}_8\,(5^2) = 1$
$8q+7$	7	$\text{ост}_8\,(7^2) = 1$

Таким образом, остаток от деления квадрата нечетного числа на 8 равен 1.

Ответ. 1.

Элементарная математика

Тест содержит несколько заданий из содержания ОГЭ и ЕГЭ по математике.

Педагогика

Вопросы носят общекультурный характер.