# Решения задач Первого этапа

# X открытого регионального творческого конкурса учителей математики

*1 этап, 11 февраля — 25 февраля 2021 года*

*Материалы составлены:* Н.Н. Штыков
*Решения подготовлены:* А.И. Ковыршина, Е.С. Лапшина, Н.Н. Штыков

*Каждая задача оценивается в 10 баллов.*
Ниже приведены решения задач и специальные критерии для их оценивания.

1. В строительной бригаде четыре человека: слесарь, электрик, дизайнер, каменщик. Их зовут Андрей, Игорь, Петр и Михаил. Известно, что: 1) Игорь старше Андрея; 2) Слесарь не имеет родственников среди других членов бригады; 3) Электрик и дизайнер — братья; 4) Петр — дядя Игоря; 5) Дизайнер — не дядя каменщика; 6) Каменщик — не дядя электрика. Как зовут слесаря? (Нужно считать, что дядя может быть младше племянника.)

   **Решение.** Так как Петр и Игорь родственники, то слесарем может быть Михаил или Андрей. Рассмотрим все случаи.

   1) Петр и Игорь — электрик и дизайнер (или наоборот).
   Этот случай невозможен, поскольку электрик и дизайнер — братья.

   2) Петр — дизайнер, Игорь — каменщик.
   Не годно, так как дизайнер – не дядя каменщика.

   3) Игорь — каменщик, Петр — дизайнер.
   Но тогда электрик, брат Петра, тоже дядя каменщика, что противоречит условию.

   4) Игорь — электрик, Петр — каменщик.
   Не годно, так как каменщик – не дядя электрика.

   И остался последний вариант.

   5) Игорь — каменщик, Петр — электрик.
   Этот случай возможен (если дизайнер, брат Петра, не дядя Игоря, а его отец). Но тогда дизайнер — это не Андрей, ведь он младше Игоря. Отсюда, дизайнер — Михаил, слесарь — Андрей.

   **Ответ**. Андрей

   **Критерии.** Ответ: Андрей, Михаил. — 2 балла.

2. Натуральные числа $x$, $y$ такие, что $x^3+y^3=x^2+42xy+y^2$. Найдите наибольшее значение $x$, являющееся решением уравнения.

   **Решение.** Пусть НОД$(x,y)=d$. Тогда $x=dx_1$, $y=dy_1$, НОД$(x_1,y_1)=1$, $x_1,y_1,d\in\mathbb{N}$. Получаем:

$$\begin{aligned}
d^3x_1^3+d^3y_1^3 &= d^2x_1^2+42d^2x_1y_1+d^2y_1^2,\\
d(x_1^3+y_1^3) &= x_1^2+42x_1y_1+y_1^2,\\
d(x_1+y_1)(x_1^2-x_1y_1+y_1^2) &= (x_1^2-x_1y_1+y_1^2)+43x_1y_1,\\
(dx_1+dy_1-1)(x_1^2-x_1y_1+y_1^2) &= 43x_1y_1.
\end{aligned}$$

Заметим, что числа $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2$ и $x_1$ взаимно просты:

$$\text{НОД}(x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2, x_1) = \text{НОД}(y_1^2, x_1) = 1,$$

и аналогично, числа $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2$ и $y_1$ взаимно просты. Значит, $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = 1$ или $x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 = 43$.

Рассмотрим первый случай:
$$\begin{cases} x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 &= 1, \\ dx_1 + dy_1 - 1 &= 43x_1y_1. \end{cases}$$
Из условия неотрицательности дискриминанта первого квадратного уравнения $x_1^2 - x_1y_1 + (y_1^2 - 1) = 0$ получаем $D = 4 - 3y_1^2 \geqslant 0$, $y_1^2 \leqslant 1\frac{1}{3}$. Отсюда находим один натуральный корень $y_1 = 1$ и соответствующий ему корень $x_1 = 1$. Из второго уравнения системы имеем $2d - 1 = 43$, $d = 22$.

Итак, мы нашли первое решение уравнения $(22, 22)$.

Рассмотрим второй случай:
$$\begin{cases} x_1^2 - x_1y_1 + y_1^2 &= 43, \\ dx_1 + dy_1 - 1 &= x_1y_1. \end{cases}$$
Аналогично, оценим дискриминант первого квадратного уравнения системы: $D = 172 - 3y_1^2 \geqslant 0$, откуда $y_1^2 \leqslant 57\frac{1}{3}$. Нам нужно найти все такие натуральные значения $1 \leqslant y_1 \leqslant 7$, что $D$ является точным квадратом натурального числа. Перебор приводит нас к двум значениям: $y_1 = 1$ (соответствующее $x_1 = 7$, $d = 1$) и $y_1 = 7$ (соответствующее $x_1 = 1$, $d = 1$).

Таким образом, получили два оставшихся решения $(7, 1)$ и $(1, 7)$.

**Ответ**. 22

**Критерии.** Ответ: 7. — 2 балла.

3. Пусть $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$, $a_n \neq 0$, $n \geqslant 0$ – многочлен с наименьшей возможной степенью, для которого $P(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$. Найдите значение $P(2)$.
*Уточнение условия.* Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами.

**Решение.** *Способ 1.* Многочлен с целыми коэффициентами $P(x)$ нулевой степени будет всегда принимать целочисленное значение, отличное от $\sqrt{3} - \sqrt{2}$.

Многочлен первой степени $P(x) = a_0 + a_1x$ так же не подходит. Это можно доказать методом неопределенных коэффициентов. Действительно, в этом случае $P(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = a_0 + a_1\sqrt{3} + a_1\sqrt{2} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, но в силу иррациональности $\sqrt{3}$ и $\sqrt{2}$ это возможно только при $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_1 = -1$. Противоречие.

Аналогичным образом можно показать, что степень $P(x)$ не равна 2. Рассмотрим многочлен третьей степени: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $a_3 \neq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} P(\sqrt{3} + \sqrt{2}) &= a_0 + a_1(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + a_2(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 + a_3(\sqrt{3} + \sqrt{2})^3 = \\ &= a_0 + a_1(\sqrt{3} + \sqrt{2}) + a_2(5 + 2\sqrt{6}) + a_3(9\sqrt{3} + 11\sqrt{2}) = \\ &= (a_0 + 5a_2) + (a_1 + 9a_3)\sqrt{3} + (a_1 + 11a_3)\sqrt{2} + 2a_2\sqrt{6}. \end{aligned}$$

Условие $P(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{3}-\sqrt{2}$ равносильно системе

$$\begin{cases} a_0 + 5a_2 &= 0, \\ a_1 + 9a_3 &= 1, \\ a_1 - 11a_3 &= -1, \\ 2a_2 &= 0, \end{cases}$$

из которой получаем $a_0 = 0$, $a_1 = 10$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, и находим $P(x) = 10x - x^3$ — многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условию. Отсюда, $P(2) = 12$.

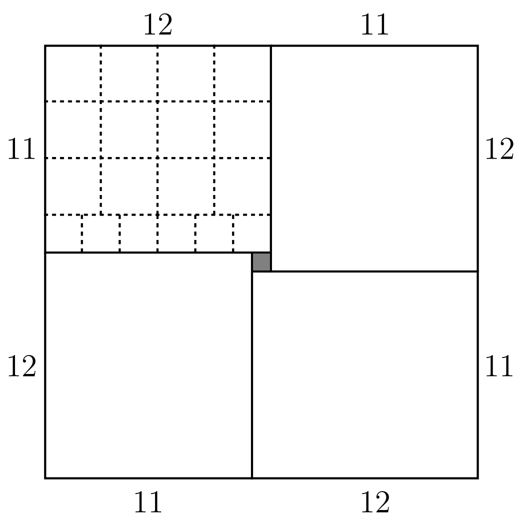
*Способ 2.* По-другому можно было рассуждать так. Пусть $t = \sqrt{3}+\sqrt{2}$, тогда $t^2 = 5+2\sqrt{6}$, откуда видно, что линейная комбинация с целыми коэффициентами $t^2$ и $t$ никогда не даст целого числа. Значит, степень искомого многочлена не меньше 3. Рассмотрим $t^4 = 49 + 20\sqrt{6}$. Если теперь взять $t^2$ с коэффициентом 10, то можно построить многочлен с целыми коэффициентами, значение которого при $t = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ является целым: $t^4 - 10t^2 = -1$. Отсюда, $t^3 - 10t = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\sqrt{3}$. Многочлен $-10t + t^3$ — искомый. Заметим однако, что этот способ не доказывает, что искомый многочлен однозначно определен.

**Ответ**. 12

4. Квадрат $23 \times 23$ разбит на квадраты $1 \times 1$, $2 \times 2$ и $3 \times 3$. Какое наименьшее количество квадратов $1 \times 1$ может быть при этом использовано?

**Решение.** Предположим, что в разбиении нет квадратов $1 \times 1$. Раскрасим столбцы по очереди в желтый и черный цвета. Тогда желтых клеток в квадрате $23 \times 23$ на 23 будет больше, чем черных. С другой стороны в квадрате $2 \times 2$ желтых и черных клеток поровну, а в квадрате $3 \times 3$ клеток одного цвета больше на 3, чем клеток другого цвета. Значит разность желтых и черных клеток во всех квадратах $2 \times 2$ и $3 \times 3$ делится на 3. Противоречие.

*Примером* может быть следующее разбиение. Квадрат $1 \times 1$ — в центральной клетке квадрата $23 \times 23$, а в каждом из четырех прямоугольников $11 \times 12$ можно сначала выделить прямоугольник $3 \times 12$ и четыре прямоугольника $2 \times 12$. Далее легко эти части разделить на квадраты $2 \times 2$ и $3 \times 3$.




**Ответ**. 1

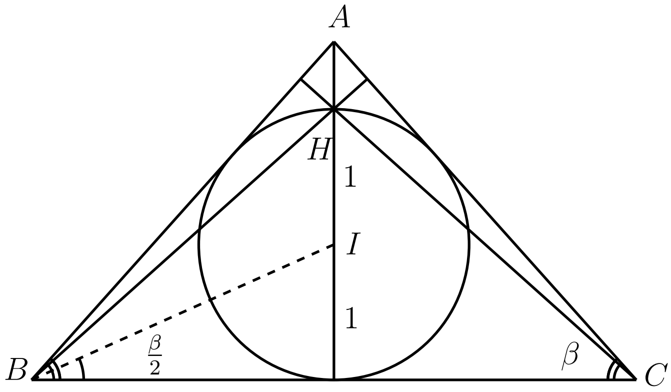
5. В равнобедренный треугольник $ABC$ ($AB = AC$) вписана окружность единичного радиуса, на которой лежит ортоцентр треугольника $ABC$. Оказалось, что $\cos\angle BAC = \frac{m}{n}$, где $m$ и $n$ – взаимно простые положительные числа. Найдите $m + n$.

**Решение.** Пусть $\angle ABC = \beta$, точки $I$, $H$, $D$ — центр вписанной окружности, ортоцентр, точка касания вписанной окружности со стороной $BC$ соответственно. Тогда $\angle HBD = 90^\circ - \beta$, $\angle IBD = \frac{\beta}{2}$.

Так как $\operatorname{tg}\angle IBD = \frac{ID}{BD} = \frac{1}{BD}$ и $\operatorname{tg}\angle HBD = \frac{HD}{BD} = \frac{2}{BD}$, то получаем уравнение

$$\begin{aligned} 2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \operatorname{tg}(90^\circ - \beta), \\ 2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Решаем уравнение и получаем $\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}} = \frac{2}{3}$. Отсюда находим $\cos\angle BAC = \cos(180^\circ - 2\beta) = 1 - 2\cos^2\beta = \frac{1}{9} = \frac{m}{n}$. Значит, $m + n = 10$.




**Ответ**. 10

6. Найдите наибольшее натуральное число $n$ такое, что если для некоторых натуральных чисел $a$ и $b$ число $a^2b + 1$ делится на $n$, то $a^2 + b$ делится на $n$.

**Решение.** *Оценка.* Сделаем предварительно три замечания.

1) Если $a^2b + 1$ делится на $n$, то НОД$(a, n) = 1$. (Действительно, при НОД$(a, n) = d$ получаем, что $a^2b + 1 \,\vdots\, d$ и $a^2b \,\vdots\, d$, откуда, $1 \,\vdots\, d$.) Значит, если нас интересуют $a$ и $b$, при которых $a^2b + 1 \,\vdots\, n$, можно ограничиться рассмотрением $a$ и $b$, взаимно простых с $n$.

2) Для любого $a$ такого, что НОД$(a, n) = 1$, найдется соответствующее $b$ такое, что $a^2b + 1 \,\vdots\, n$. Это объясняется тем, что линейное относительно $b$ сравнение $a^2b \equiv -1 \pmod n$ имеет единственное решение при НОД$(a^2, n) = 1$.

3) Равенство $a^2b + 1 = a^2(a^2 + b) - (a^4 - 1)$ показывает, что при $a^2b + 1 \,\vdots\, n$ кратность $a^2 + b \,\vdots\, n$ равносильна кратности $a^4 - 1 \,\vdots\, n$.

Допустим теперь, что для каких-то $a$ и $b$ следствие из условия задачи выполнено: $a^2b + 1$ делится на $n$ и $a^4 - 1$ делится на $n$. Пусть $n = 2^k \cdot t$, $k \geqslant 0$, $t$ — нечетно. Положим $a = t - 2$.

Тогда, по-доказанному,

$$\begin{aligned} (t-2)^4-1 &\ \vdots\ 2^k\cdot t,\\ (t-2)^4-1 &\ \vdots\ t,\\ t^4-8t^3+24t^2-32t+15 &\ \vdots\ t,\\ 15 &\ \vdots\ t, \end{aligned}$$

то есть $n$ — степень числа 2, умноженная на делитель 15.

Оценим теперь показатель степени 2 в представлении $n = 2^k \cdot t$. Возьмем $a = 11$. В этом случае $a^4 - 1 = 11^4 - 1 = 14640 = 2^4 \cdot 915 \vdots 2^k$, откуда $k \leqslant 4$.

Значит, $n \leqslant 2^4 \cdot 15 = 240$.

*Пример.* Пусть $n = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 = 240$. Рассмотрим $a$, взаимно простые с 2, 3, 5. Число $a^2$ при делении на 240 может давать остатки 1, 49, 121, 169. Из решения соответствующих сравнений мы можем подобрать значения для подходящих $b$ : 239, 191, 119, 71 (по модулю 240).

Далее, нетрудно убедиться,что для всех $a$, взаимно простых с 240, выражение

$$a^4 - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)$$

будет кратно 240, что и гарантирует следствие.

**Ответ**. 240

**Критерии.** Ответ: отличный от 1 делитель числа 240, меньший 240. — 2 балла.

7. Найдите наибольшее целое значение параметра $t$ такое, что для сторон треугольника $a$, $b$, $c$ величины $a^2 + bct$, $b^2 + cat$, $c^2 + abt$ тоже являются сторонами треугольника.

   **Решение.** *Пример.* Покажем, что $t = 2$ подходит. Убедимся, что сумма любых двух сторон всегда больше третьей. Действительно,

   $$(b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) = (b-c)^2 + 2a(b+c-a) > 0,$$

   так как первое слагаемое неотрицательно, а второе положительно для любых сторон треугольника $a$, $b$, $c$.

   *Оценка.* Докажем, что при $t > 2$ найдутся такие $a$, $b$, $c$, при которых условие нарушится. Рассмотрим равнобедренный треугольник со сторонами $b = 1$, $c = 1$ и маленьким по сравнению с боковыми сторонами основанием $a$. Тогда

   $$(b^2 + cat) + (c^2 + abt) - (a^2 + bct) = 2 - t + 2at - a^2 \leqslant 2 - t + 2at \leqslant 0$$

   при $a \leqslant \frac{t-2}{2t}$.

   **Ответ**. 2

8. В сенате 51 сенатор. Все сенаторы должны входить в комитеты, причем каждый сенатор ровно в один комитет. Каждый сенатор ненавидит трех других сенаторов (ненависть не

обязательно взаимна). Какое наименьшее количество комитетов возможно, чтобы в них не было двух сенаторов, один из которых ненавидит другого?

**Решение.** Пусть есть 7 сенаторов, для любых двух из которых один ненавидит другого. Если комитетов меньше семи, то в каком-то из комитетов окажутся хотя бы два из этих сенаторов.

Докажем, что 7 подходящих комитетов можно организовать. Доказательство по индукции с базой $n = 7$ (комитет состоит из одного сенатора). Пусть для $n > 7$ сенаторов можно создать 7 подходящих комитетов. Пусть сенаторов $n + 1$. Среди них найдется сенатор, которого ненавидят не более трех других сенаторов. Рассмотрим сенат без этого сенатора. Оставшихся $n$ сенаторов распределим по 7 комитетам. Выделенный сенатор ненавидит трех сенаторов, которых располагаются не более чем в трех комитетах. Те сенаторы, которые его ненавидят, находятся также не более чем в трех комитетах. Значит, есть комитет, в который без нарушения условия можно поместить этого сенатора.

**Ответ**. 7

9. Найдите наименьшее натуральное число $k$ такое, что для каждого натурального числа $m$ $(1 \leqslant m \leqslant 1000)$ существует такое натуральное $n$, что $\frac{mk}{1001} < n < \frac{(m+1)k}{1002}$.

**Решение.** *Оценка.* Пусть $m = 1000$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1000k}{1001} &< n < \frac{1001k}{1002}, \\ k - \frac{k}{1001} &< n < k - \frac{k}{1002}. \end{aligned}$$

Если $k \leqslant 1001$, то $n$ удовлетворяет неравенству $k - 1 \leqslant k - \frac{k}{1001} < n < k - \frac{k}{1002} < k$ и не может быть целым числом.

Значит, $k \geqslant 1002$. Тогда $\frac{k}{1002} \geqslant 1$, и получаем $k - \frac{k}{1001} < n < k - \frac{k}{1002} \leqslant k - 1$, откуда $k - \frac{k}{1001} < k - 2$, то есть $k > 2002$.

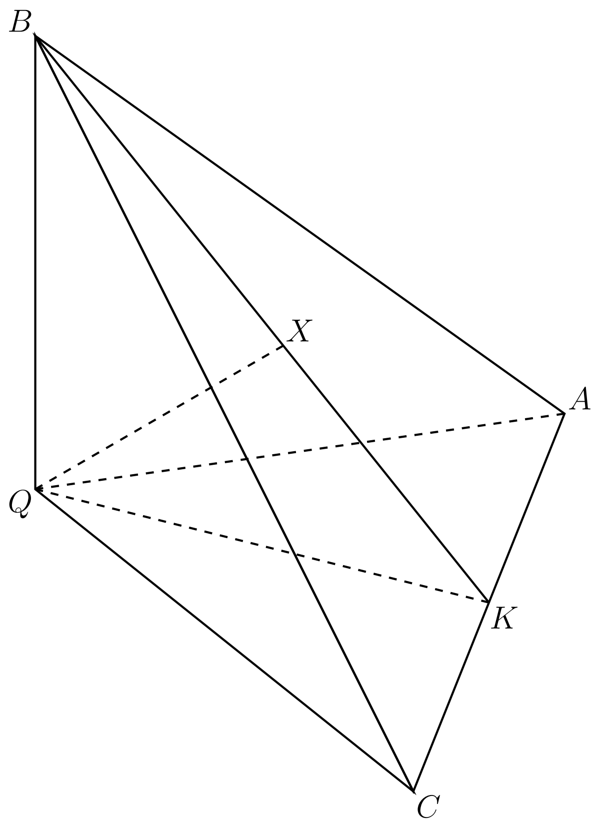
*Пример.* Осталось показать, что $k = 2003$ подходит. При $k = 2003$ исходное неравенство:

$$\frac{2003m}{1001} < n < \frac{2003(m+1)}{1002},$$

будет верным при $n = 2m + 1$ для любого натурального $1 \leqslant m \leqslant 1000$.

**Ответ**. 2003

10. Точка $Q$ вне плоскости треугольника $ABC$ расположена так, что $\angle AQB = \angle BQC = \angle CQA = 90°$, а точка $X$ – проекция точки $Q$ на плоскость треугольника $ABC$. Найдите $\angle AXC$, если $\angle ABC = 40°$ и $\angle ACB = 75°$.




**Решение.** Проведем прямую $BX$ до пересечения с $AC$ в точке $K$. Так как $BQ$ перпендикулярна $AQ$ и $CQ$, то $BQ$ перепендикулярна плоскости $(AQC)$. Отсюда получаем, что прямая $AC$ перепендикулярна плоскости $(BQK)$, поскольку она перпендикулярна двум пересекающимся прямым $BQ$ и $QX$ из этой плоскости. Таким образом, мы доказали, что $AC$ перпендикулярна прямой $BK$, лежащей в перпендикулярной ей плоскости.

Аналогично, проводя прямые $AL$ и $CM$ до пересечения с $BC$ и $AB$ соответственно, получим, что $AL \perp BC$, $CM \perp AB$. Значит, точка $X$ — ортоцентр треугольника $ABC$ и $\angle AXC = 180^\circ - \angle ABC = 140^\circ$.

**Ответ**. 140