

VIII открытый региональный творческий конкурс учителей математики

1 этап, 16–26 февраля 2019 года

1. Найдите значение выражения $16A$, где $A = \sin^3 18^\circ + \sin^2 18^\circ$.
2. В конкурсе приняло участие 15 девочек, каждая из которых набрала некоторое количество баллов. Требуется раздать им N булочек так, чтобы выполнялись следующие условия: (i) каждая получила хотя бы одну булочку; (ii) все булочки были розданы; (iii) в любой паре девочек больше булочек получила та, которая получила больше баллов в конкурсе (а если результаты равны, то и булочек они должны получить поровну). Найдите наименьшее N , для которого это заведомо возможно (при любом результате конкурса).
3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность радиуса 1 так, что AC — диаметр окружности, а $AB = BD$. Диагонали пересекаются в точке P и $PC = \frac{2}{5}$. Найдите $9CD$.
4. В прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C вписаны два квадрата так, что у одного одна из вершин C , а у другого сторона расположена на AB , и их площади соответственно равны $S_1 = 441$, $S_2 = 440$. Найдите величину $AC + BC$.
5. В шахматном турнире в один круг участвовало 30 шахматистов. У какого наибольшего числа шахматистов после окончания турнира могло оказаться ровно 5 очков? (Победа — 1 очко, ничья — 0,5, поражение — 0.)
6. При каких значениях параметра a уравнение $3^{x^2-2ax+a^2} = ax^2 - 2a^2x + a^3 + a^2 - 4a + 4$ имеет ровно одно решение?
7. Шарики пронумерованы от 1 до 101 и разложены по двум коробкам A и B . Шарик с номером 40 из коробки A переместили в коробку B . Среднее арифметическое номеров шариков в каждой коробке увеличилось на 0,25. Сколько шариков было в коробке A ?
8. В сосуде A было 4 литра 45% раствора спирта. В сосуде B — 5 литров 48% раствора спирта, а в сосуде C — 1 литр $k\%$ раствора спирта. Из C в A перелили s литров раствора, а остальное перелили в B . В результате в A и B оказались 50% растворы. Найдите $\frac{k}{s}$.
9. Возрастающая последовательность 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, ... состоит из таких натуральных чисел, которые являются степенями числа 3 или суммой различных степеней числа 3. Найдите сотый элемент последовательности.
10. Уравнение $x^2 + 6ax - a = 0$ имеет действительные корни x_1 и x_2 (необязательно различные). Найдите наименьшее *целое* значение выражения

$$\frac{9a - 4a^2}{(1 + x_1)(1 + x_2)} - \frac{70a^3 + 1}{(1 - 6a - x_1)(1 - 6a - x_2)}.$$