

Министерство образования Иркутской области  
ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет»  
Кафедра математики и методики обучения математике  
Кафедра алгебраических и информационных систем

**X открытый региональный творческий конкурс учителей математики**

1 этап, 11–23 февраля 2021 года

*Внимание! Если у задачи несколько ответов, их нужно перечислить через точку с запятой.*

1. В строительной бригаде четыре человека: слесарь, электрик, дизайнер, каменщик. Их зовут Андрей, Игорь, Петр и Михаил. Известно, что: 1) Игорь старше Андрея; 2) Слесарь не имеет родственников среди других членов бригады; 3) Электрик и дизайнер – братья; 4) Петр – дядя Игоря; 5) Дизайнер – не дядя каменщика; 6) Каменщик – не дядя электрика. Как зовут слесаря? (Нужно считать, что дядя может быть младше племянника.)
2. Натуральные числа  $x, y$  такие, что  $x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2$ . Найдите наибольшее значение  $x$ , являющееся решением уравнения.
3. Пусть  $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $n \geq 0$  – многочлен с наименьшей возможной степенью, для которого  $P(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$ . Найдите значение  $P(2)$ .
4. Квадрат  $23 \times 23$  разбит на квадраты  $1 \times 1$ ,  $2 \times 2$  и  $3 \times 3$ . Какое наименьшее количество квадратов  $1 \times 1$  может быть при этом использовано?
5. В равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ) вписана окружность единичного радиуса, на которой лежит ортоцентр треугольника  $ABC$ . Оказалось, что  $\cos \angle BAC = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  – взаимно простые положительные числа. Найдите  $m + n$ .
6. Найдите наибольшее натуральное число  $n$  такое, что если для некоторых натуральных чисел  $a$  и  $b$  число  $a^2b + 1$  делится на  $n$ , то  $a^2 + b$  делится на  $n$ .
7. Найдите наибольшее целое значение параметра  $t$  такое, что для сторон треугольника  $a, b, c$  величины  $a^2 + bct$ ,  $b^2 + cat$ ,  $c^2 + abt$  тоже являются сторонами треугольника.
8. В сенате 51 сенатор. Все сенаторы должны входить в комитеты, причем каждый сенатор ровно в один комитет. Каждый сенатор ненавидит трех других сенаторов (ненависть не обязательно взаимна). Какое наименьшее количество комитетов возможно, чтобы в них не было двух сенаторов, один из которых ненавидит другого?
9. Найдите наименьшее натуральное число  $k$  такое, что для каждого натурального числа  $m$  ( $1 \leq m \leq 1000$ ) существует такое натуральное  $n$ , что  $\frac{mk}{1001} < n < \frac{(m+1)k}{1002}$ .
10. Точка  $Q$  вне плоскости треугольника  $ABC$  расположена так, что  $\angle AQB = \angle BQC = \angle CQA = 90^\circ$ , а точка  $X$  – проекция точки  $Q$  на плоскость треугольника  $ABC$ . Найдите  $\angle AXC$ , если  $\angle ABC = 40^\circ$  и  $\angle ACB = 75^\circ$ .