Решения и критерии проверки задач Второго этапа

IX открытого регионального творческого конкурса учителей математики

2 этап, 1 тур, 24 марта 2020 года

Алгебра и теория чисел

Каждая задача оценивается в *7 баллов.* В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице:

Общие критерии для оценивания решений олимпиадных задач	
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже приведены решения задач и специальные критерии для их оценивания.

1. Докажите, что при $x > 1$ выполняется неравенство $\frac{1}{\sqrt{x}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

   Решение. Заметим, что $x > 1$, и перепишем неравенство в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} < \sqrt{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1}.$$

   Рассмотрим его левую часть: $\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{x-1} < \sqrt{x+1}$. Так как обе части неренства неотрицательны, оно равносильно преобразуется следующим образом:

$$\frac{1}{x} + 2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} + x - 1 < x + 1,$$

$$2\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} < 2 - \frac{1}{x}.$$

Последнее неравенство в свою очередь равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ 2-\frac{1}{x} & > & 0 \\ 4\frac{x-1}{x} & < & 4-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & > & 1 \\ x & \in & (-\infty;0)\cup(\frac{1}{2};+\infty) \\ \frac{1}{x^2} & > & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 1.$$

Аналогичным образом рассматриваем правую часть неравенства:

$$\sqrt{x+1} < \frac{1}{\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-1},$$

$$x+1 < \frac{1}{x-1} + x - 1 + 2,$$

$$0 < \frac{1}{x-1},$$

$$x > 1.$$

Итак, при $x > 1$ исходное неравенство справедливо.

Критерии. Логические ошибки при решении неравенств с иррациональностью. В частности, неверное применение метода равносильных преобразований — 0 баллов.

Доказано одно неравенство из двух — 2 балла.

2. Целые числа k, s, t таковы, что $(k+s+t)^2 = -(ks+st+tk)$, а попарные суммы чисел k, s, t не равны 0. Докажите, что произведение любых двух из чисел $k+s$, $s+t$, $t+k$ делится на третье.

Решение. *Способ 1.* Докажем делимость $(k+s)(s+t) = ks+kt+s^2+st$ на $t+k$. По условию $(k+s+t)^2+ks+st+tk = 0$, $0 \vdots t+k$. Так как $ks+kt+s^2+st = (k+s+t)^2+ks+$ $+st+tk-(k+t)^2-2s(k+t)$, то $(k+s)(s+t) \vdots t+k$. Аналогично выражаем $(k+s)(t+k)$ через кратные $s+t$, а $(s+t)(t+k)$ через кратные $k+s$.

Способ 2. Равенство $(k+s+t)^2 = -(ks+st+tk)$ можно переписать в виде

$$(k+s)(s+t)+(k+s)(t+k)+(s+t)(t+k) = 0,$$

откуда выводится, что $(k+s)(s+t)$ кратно $t+k$. Аналогично получаем два других соотношения.

Критерии. Доказано только одно неравенство из трёх. — 6 баллов. (Следовало либо доказать все три соотношения, либо упомянуть, что доказательство оставшихся двух производится аналогично.)

3. Найдите все значения c, при каждом из которых система уравнений

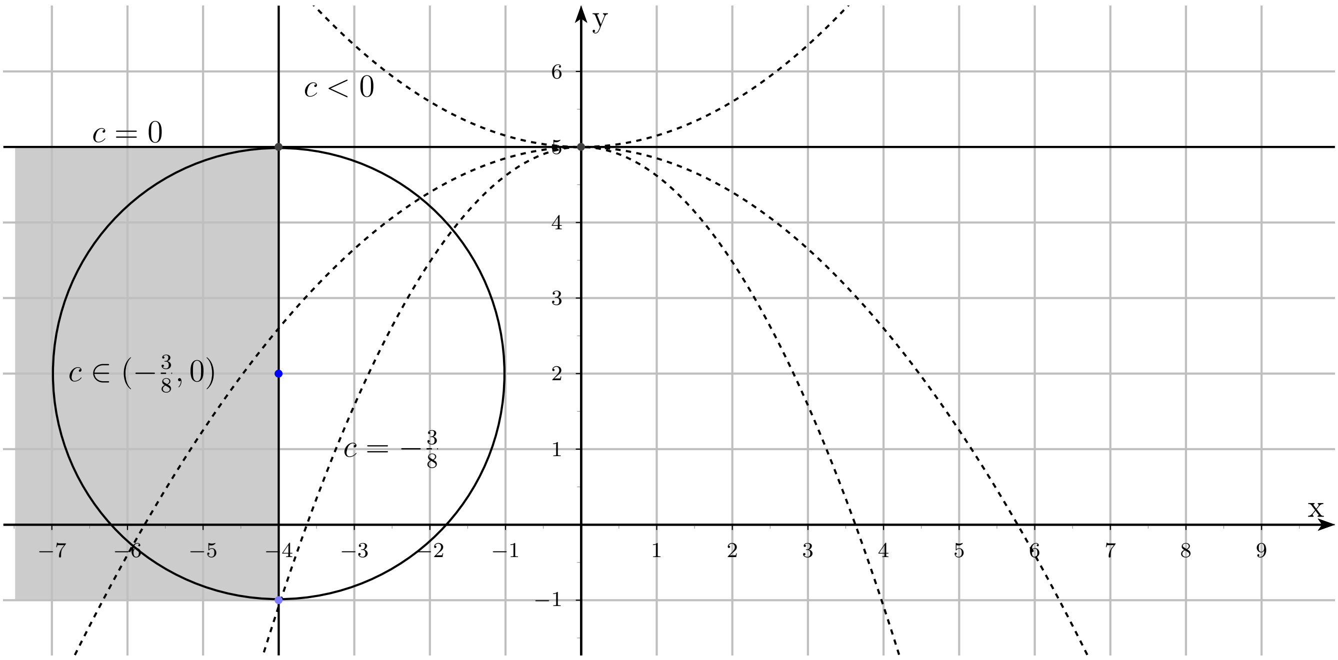
$\left\{\begin{array}{l} y-5 = cx^2 \\ x+\sqrt{5-y^2+4y} = -4 \end{array}\right.$ имеет хотя бы одно решение.

Решение. При ограничениях $5-y^2+4y \geqslant 0$, $-4-x \geqslant 0$ уравнение $x+\sqrt{5-y^2+4y}=-4$ можно переписать в виде:

$$5-y^2+4y=(-4-x)^2,$$

$$(x+4)^2+(y-2)^2=3^2.$$

Таким образом, график второго уравнения представляет собой полуокружность радиуса 3 с центром в $(-4;2)$ в диапазоне $x \leqslant -4$, $-1 \leqslant y \leqslant 5$. На рисунке этот диапазон выделен серым цветом.



При $c=0$ прямая $y=5$ будет иметь с полуокружностью одну точку пересечения.

При $c>0$ парабола $y=cx^2+5$ не пересекает полуокружность.

При $c<0$ графики будут иметь одну точку пересечения, если парабола пересекает прямую $x=-4$ при $-1 \leqslant y \leqslant 5$. Найдем, при каком c парабола проходит через нижнюю точку $(-4;-1)$:

$$-1=16c+5,$$

$$c=-\frac{3}{8}.$$

Это означает, что при $c\in[-\frac{3}{8},0]$ графики имеют точку пересечения.

Ответ. $[-\frac{3}{8},0]$.

Критерии. Получено множество значений параметра c (случайно совпавшее с искомым множеством) из области допустимых значений переменной y второго уравнения и условия $x \geqslant -4$ без обоснования существования решения рассматриваемой системы уравнений — 3 балла.

4. Для каких целых n уравнение $\frac{3xy-1}{x+y}=n$ имеет решение в целых x и y?

Решение. Выразим $x=\frac{1+ny}{3y-n}$. Будем теперь подбирать y и n так, чтобы знаменатель был равен ±1. Это гарантирует существование целочисленного решения уравнения.

Случай 1. Пусть $n = 3k+1$. Тогда при $y = k \quad x = \frac{1+(3k+1)k}{3k-3k-1} = -3k^2 - k - 1$. Пары целых чисел $(-3k^2 - k - 1; k)$ являются решениями данного уравнения.

Случай 2. Пусть $n = 3k-1$. При $y = k \quad x = \frac{1+(3k-1)k}{3k-3k+1} = 3k^2 - k + 1$. Пары целых чисел $(3k^2 - k + 1; k)$ являются решениями данного уравнения.

Случай 3. Пусть $n = 3k$. Тогда из равенства $3xy - 1 = n(x+y)$ следует, что $1 = 3xy - - n(x+y) \vdots 3$, что невозможно.

Ответ. Для всех целых n, не кратных 3.

Критерии. Доказано, что при некоторых натуральных n уравнение имеет решение. — 0 баллов.

Доказано, что при n, не кратном 3, уравнение не имеет решения. — 3 балла.

5. Существует ли такая функция $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \neq const$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — полиномы с действительными коэффициентами, что $f(x) = f(1-x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Решение. *Способ 1.* Заметим, что заменив x на $\frac{1}{x}$ в многочлене $h(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + + \ldots + a_n$ мы получим $\frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{x^n}$. Будем считать, что набор коэффициентов многочлена $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ является палиндромом, а значит $h\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{h(x)}{x^n}$. Для многочленов $f_1(x) = x^2$ и $f_2(x) = (1-x)^2$ выполняются равенства $f_1(1-x) = f_2(x)$, $f_2(1-x) = f_1(x)$ и $f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}$, $f_2\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{f_2(x)}{x^2}$. Примем в качестве $Q(x)$ произведение $x^2(1-x)^2$, тогда отношение $\frac{h(x)}{Q(x)}$ после замены x на $\frac{1}{x}$ равно $\frac{h(x)x^4}{x^n f_2(x)}$. Нетрудно увидеть, что при $n = 6$ знаменатель последней дроби равен $f_1(x)f_2(x)$. Найдем многочлен $h(x) = ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + cx^2 + bx + a$, удовлетворяющий условию $h(1-x) = h(x)$. Например, методом неопределенных коэффициентов, получим общее решение для коэффициентов $h(x) : b = -3a$, $d = 5a - 2c$. Положим $a = 1$, $c = 0$, тогда $h(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x + 1$.

Таким образом, найдены многочлены $P(x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x + 1$, $Q(x) = x^2(1-x)^2$, для которых справедливо требование задачи.

Способ 2. Искомая функция может быть такой:

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + (1-x)^2 + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{x^2}{(1-x)^2} + \frac{(1-x)^2}{x^2}.$$

После преобразования получаем, что $P(x) = 2x^6 - 6x^5 + 9x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 6x + 2$, $Q(x) = = x^2(1-x)^2$.

Из представленных решений видим, что функция $f(x)$ определяется неоднозначно.

Ответ. Существует.

6. Различные натуральные числа a, b, c, d меньше простого числа p, а числа a^4, b^4, c^4, d^4 дают одинаковые остатки при делении на p. Докажите, что $a^{999} + b^{999} + c^{999} + d^{999}$ делится на $a + b + c + d$.

Решение. Всюду далее мы будем использовать одно из понятий теории чисел — *сравнимость по модулю* — и его свойства.

Целые числа x и y называются *сравнимыми по модулю* m (где m — натуральное число, отличное от 1), если x и y при делении на m дают одинаковые остатки.

Этот факт записывается так:

$$x \equiv y (\operatorname{mod} m).$$

К примеру, $8 \equiv 23 (\operatorname{mod} 5)$, так как оба числа 8 и 23 при делении на 5 дают остаток 3.

Таким образом, из условия следует, что $a^4 \equiv b^4 \equiv c^4 \equiv d^4 (\operatorname{mod} p)$.

Если a^4 и b^4 дают одинаковые остатки при делении на p, то разность этих чисел $a^4 - b^4 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$ кратна p. Поскольку p — простое, либо $a^2 - b^2$, либо $a^2 + b^2$ делится на p. Значит, для любых двух из четырёх квадратов a^2, b^2, c^2 и d^2 или их сумма делится на p, или разность. Иначе говоря, они либо сравнимы по модулю p, либо их сумма кратна p.

Заметим, что если квадраты двух различных натуральных чисел x^2 и y^2 $(x, y < p)$ сравнимы по модулю p, то $(x - y)(x + y)$ кратно p. Но разность $x - y$ меньше p и отлична от 0. Значит, $x + y$ кратно p, что возможно только в случае, когда $x + y = p$.

Покажем теперь, что никакие три квадрата из этих четырёх не сравнимы друг с другом. Пусть, к примеру, $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 (\operatorname{mod} p)$. Но тогда $a + b = p$, $a + c = p$, откуда $b = c$, что противоречит условию.

Значит, из $a^2 \equiv b^2 (\operatorname{mod} p)$ следует, что $a^2 \equiv -c^2 (\operatorname{mod} p)$ и $a^2 \equiv -d^2 (\operatorname{mod} p)$. Тогда $c^2 \equiv d^2 (\operatorname{mod} p)$. Итак, эти четыре квадрата разобъются на две пары чисел, сравнимых друг с другом. Отсюда, $a + b = p$ и $c + d = p$. Получили, что $a + b + c + d = 2p$.

Так как $a \equiv -b (\operatorname{mod} p)$, то $a^{999} \equiv (-b)^{999} \equiv -b^{999} (\operatorname{mod} p)$. А значит, $a^{999} + b^{999} \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$, и аналогично, $c^{999} + d^{999} \equiv 0 (\operatorname{mod} p)$. Тогда сумма $S = a^{999} + b^{999} + c^{999} + d^{999}$ кратна p. С другой стороны, простое число p, очевидно, больше 2, поэтому a и b, сумма которых равна p, имеют разную чётность. Так же числа c и d разной чётности. Но, значит, сумма S чётна и кратна p, откуда получаем, что она делится на $2p$, то есть на $a + b + c + d$.