Решения и критерии проверки задач Второго этапа

IX открытого регионального творческого конкурса учителей математики

2 этап, 2 тур, 25 марта 2020 года

Геометрия и комбинаторика

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Каждая задача оценивается в *7 баллов.* В случае отсутствия специальных критериев по задаче, её решение оценивается по приведённой ниже таблице:

Общие критерии для оценивания решений олимпиадных задач	
Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако решение содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	Верно рассмотрен один из существенных случаев.
2	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии правильного решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Ниже приведены решения задач и специальные критерии для их оценивания.

1. Можно ли покрасить клетки квадрата 8×8 в 16 цветов так, чтобы для любых двух цветов нашлись клетки этих цветов, имеющих общую сторону?

   Решение. Из 16 различных цветов получим $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ всевозможных пар цветов. В квадрате 8×8 на одной горизонтали можно выделить 7 пар клеток, всего $7 \cdot 8 = 56$ горизонтально расположенных пар. Аналогично, выделяя вертикально расположенные пары клеток, получим еще 56 пар. Следовательно, количество пар клеток в квадрате 8×8 равно 112, что меньше 120.

   Ответ. Нет.

   Критерии. Отсутствует обоснование найденных значений для количества пар цветов или пар клеток. — 5 баллов.

2. На плоскости провели 9 прямых так, что некоторые из них параллельны, другие пересекаются так, что никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Может ли оказаться так, что точек пересечения прямых ровно 17?

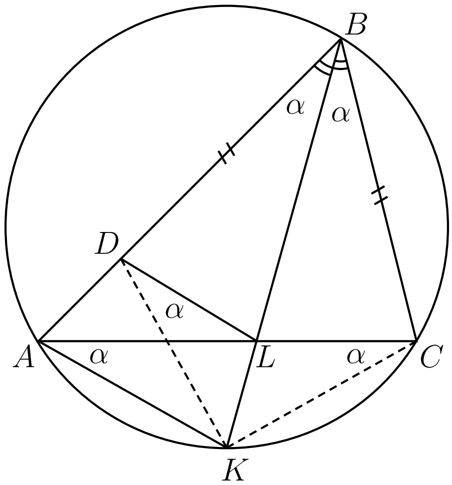
Решение. Допустим, каждая прямая пересекается хотя бы с четырьмя другими. Тогда всего получается не менее $\frac{9 \cdot 4}{2} = 18$ точек пересечения. Значит, есть прямая, пересекающая не более трёх других, то есть имеется хотя бы пять параллельных ей. Итак, у нас есть 6 параллельных прямых. Если три оставшиеся прямые не параллельны им, точек пересечения снова 18. Значит, есть хотя бы 7 параллельных прямых. Но тогда точек пересечения не больше 15.

Ответ. Нет.

Критерии. Отсутствие доказательства, что какая-либо конфигурация доставляет минимум точек пересечения по числу групп параллельных прямых. — 4 балла.

3. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D так, что $BD = BC$. Биссектриса BL пересекает описанную около треугольника ABC окружность в точке K. Докажите, что четырехугольник $ADLK$ — вписанный.

Решение. Обозначим $\angle ABK = \angle CBK = \alpha$. Заметим, что BK — серединный перпендикуляр к DC, значит, $DL = CL$, $DK = CK$. Тогда треугольники DKL и CKL равны по трём сторонам, и $\angle KDL = \angle KCL = \frac{1}{2}\smile{KC} = \alpha$.



Таким образом, $\angle KAC = \frac{1}{2}\smile{KC} = \angle KDL$, и значит, четырёхугольник $ADLK$ — описанный.

4. Двое игроков по очереди берут камни из кучки, в которой вначале лежит 2020 камней. Первый игрок своим ходом может брать 1 или 4 камня, а второй – 1 или 3 камня. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

Решение. *Способ 1.* Пусть первый игрок каждый раз берет 1 камень. Сколько бы ни взял второй игрок (1 или 3 камня), за каждые два хода первого и второго, количество камней в кучке уменьшается на четное число. Первый игрок будет придерживаться такой стратегии до тех пор пока количество камней не станет равным 4 или 6 в зависимости от хода второго игрока. Теперь первый игрок возьмет 4 камня. В первом случае камней не останется, а во втором игроки возьмут еще по одному камню.

Способ 2. Очевидно, что если в кучке 1 или 3 камня, то игрок, делающий ход побеждает. Пусть в кучке 3 камня. Если ходит первый, то он может взять только 1, далее второй может взять только 1 и последний камень заберет первый. Если ходит второй, то он за один ход возьмет эти три камня.

Рассмотрим ситуацию, когда в кучке осталось 5 камней. Для каждого из игроков, это выигрышная позиция:

1) Если ход первого игрока, то он должен взять 1 камень, и как бы ни сходил второй, выигрывает первый (если второй возьмет 1 камень, то перед ходом первого игрока останется 3 камня и как было описано выше, он победит). Если же второй возьмет 3 камня, то оставшийся камень заберет первый.

2) Если ход второго игрока, то он берет три камня и из оставшихся 2 камней первый может взять только 1, тем самым последний ход будет за вторым игроком.

Таким образом, чтобы победить, нельзя оставить сопернику 3 или 5 камней. Так как 4 – наибольшее количество камней, которые можно взять за один ход, то рассмотрим ситуации, когда в кучке от 6 до 9 камней и опишем как должен ходить первый игрок, чтобы победить.

количество камней	6	7	8	9
сколько берет первый	4	1	4	1
возможный ход второго	1	1 или 3	1 или 3	1 или 3
победа первого	+	+	+	+

Ответ. Первый игрок.

Критерии. Приведена правильная стратегия первого игрока, но она недостаточно обоснована. — 4 балла.

5. Натуральное число n поделили с остатком на $2, 3, 4, 5, \ldots, 1000$. Полученные остатки сложили и сумму поделили на n. Какое наибольшее число могло при этом получиться?

Решение. Заметим, что при $n > 1000$, сумма остатков не больше $1 + 2 + 3 + \ldots + 999 = 999 \cdot 500$. В этом случае после деления на n получится число меньшее 500.

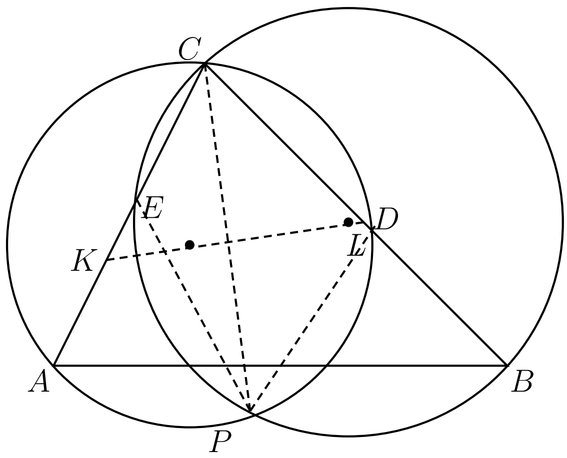
Так как остаток от деления натурального числа n на одно из чисел $2, 3, 4, 5, \ldots, 1000$ всегда не больше самого числа n, то сумма остатков не больше $999n$. Следовательно, после деления на n может получиться число не большее 999. При $n = 1$ результат как раз равен 999.

Ответ. 999.

Критерии. Рассмотрен только случай $n > 1000$. — 1 балл. Приведен пример $n = 1$, подтверждающий оценку. — 3 балла.

6. На сторонах треугольника BC и AC отмечены точки D и E соответственно так, то $BD = AE$. Прямая, проходящая через центры описанных около треугольников ADC и BEC окружностей пересекает AC и BC в точках K и L. Докажите, что $CK = LC$.

Решение.



Пусть описанные около треугольников ADC и BEC пересекаются в точке P. Тогда прямая CP перепендикулярна прямой KL, проходящей через центры этих окружностей. Докажем, что CP — биссектриса угла ACB. Тогда в треугольнике KCL прямая CP будет высотой и биссектрисой, значит $CK = CL$.

Так как точки A, P, D, C лежат на одной окружности, то $\angle EAP = \angle BDP$. Точки B, P, E, C лежат на одной окружности, поэтому $\angle AEP = \angle DBP$. Тогда треугольники AEP и DBP равны по стороне и двум углам, значит, $AP = DP$ и, следовательно, $\angle ACP$ и $\angle DCP$.